

2.1

15/03/2018

→ Απόδο λόγος τριών σημείων:

Γίνω σε μια ευθεία ℓ δίνονται δυο σημεία A και B . Ένα τρίτο σημείο P λέμε ότι χωρίζει τα A, B σε λόγο λ και γράφουμε $(ABP) = \lambda$ αν και μόνο αν $\vec{AP} = \lambda \vec{PB}$

Πρόβλημα: 1) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του P αν γνωρίζουμε τα A, B και λ .

Πρόβλημα: 2) Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης του P ως προς τοξοίο αρχή, αν γνωρίζουμε τα A, B και λ .

Απάντηση: 1.) Ας υποθέσουμε ότι $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ και το $P(x, y, z)$

Από την σχέση $\vec{AP} = \lambda \vec{PB} \Rightarrow (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = \lambda(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1) \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1) \end{cases}$$

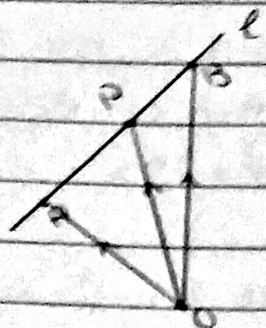
$$\Rightarrow \begin{cases} (1 + \lambda)x = x_1 + \lambda x_2 \\ (1 + \lambda)y = y_1 + \lambda y_2 \\ (1 + \lambda)z = z_1 + \lambda z_2 \end{cases}$$

• Για $\lambda = -1$ έχουμε $\vec{AP} = -\vec{PB} \Rightarrow \vec{AP} + \vec{PB} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{0} \Rightarrow A \equiv B$
 Σε αυτή την περίπτωση $A \equiv B$ και το P χωρίζει τα A, B σε λόγο -1 .

• Για $\lambda \neq -1$, τότε $A \neq B$ και οι συντεταγμένες του P είναι

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}} \quad , \quad \boxed{y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}} \quad , \quad \boxed{z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}}$$

Απόδειξη: 2)



$$\begin{aligned} \text{Από την εξίσωση } \vec{AP} &= \lambda \vec{PB} \\ \Rightarrow \vec{OP} - \vec{OA} &= \lambda (\vec{OB} - \vec{OA}) \\ \Rightarrow (1+\lambda) \vec{OP} &= \vec{OA} + \lambda \vec{OB} \end{aligned}$$

- Για $\lambda = -1$, τότε $A \equiv B$ και το P είναι οποιοδήποτε.
- Για $\lambda \neq -1$, τότε

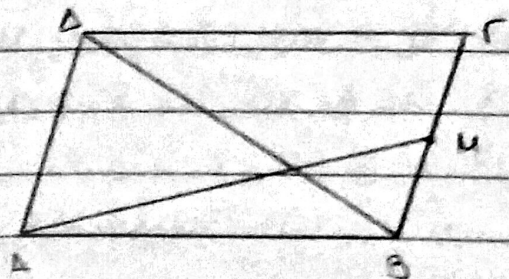
$$\vec{OP} = \frac{1}{1+\lambda} \vec{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \vec{OB}$$

Πρόταση: Πάνω σε μια ευθεία (ℓ) δίνονται διαδοχικά σημεία A και B . Αν για ένα σημείο P του $\mathbb{R}^3$ ισχύει $\vec{OP} = m \vec{OA} + n \vec{OB}$, $m \neq 0$ με $m+n=1$, τότε το $P \in \ell$ και $(ABP) = \frac{n}{m}$.

Ειδικά, αν το P είναι το μέσον του τμήματος AB , τότε $\vec{OP} = \frac{1}{2} \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{OB} \Rightarrow \lambda = 1$ και $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$, $z = \frac{z_1+z_2}{2}$.

Εφαρμογή: 1)

Να είναι παράλληλο $AB \parallel \Gamma\Delta$. Ενώσαμε με ευθεία το A με το μέσο μ του $B\Gamma$. Τότε η ευθεία αυτή τέμνει των διαγωνίων BD σε δύο τμήτα από τα οποία το ένα είναι διπλάσιο από το άλλο.



Απόδειξη: Θεωρούμε ως αρχή των διανυσμάτων την κορυφή A και ως προσέβουμε ότι $(ABE) = \lambda$

Ενδεόν $\vec{AE} = \lambda \vec{EB}$

Τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα

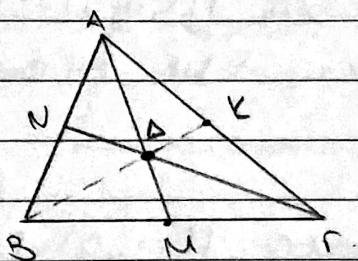
$$\vec{AE} = \frac{1}{1+\lambda} \vec{AA} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \vec{AB} \quad (2)$$

Ομως, $\vec{AE} = \lambda \vec{AN}$
 $= \lambda (\vec{AR} + \vec{AB})$
 $= \frac{\lambda}{2} (\vec{AR} + \vec{AR} + \vec{AB})$

$\vec{AE} \stackrel{\vec{AR} = \vec{AB}}{=} \frac{\lambda}{2} \vec{AR} + \lambda \vec{AB} \quad (2)$

Τα $\vec{AR}$ και $\vec{AB}$ είναι γραμμικά ανεξ. Εξισώνοντας τα (1) & (2)
 $\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1+\lambda} = \frac{\lambda}{2} \\ \frac{2}{1+\lambda} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 2/3 \end{cases}$

Εφαρμογή: 2.) Σε τρίγωνο ABC φέρνουμε τις διαμέτρους AM και BN που τέμνονται στο σημείο D .



Θα δείξουμε ότι η προέκταση του BD τέμνει το τμήμα AC στο σημείο K .

Ας θεωρήσουμε ως αρχή των διατμών το B θέτουμε $(AM) = \lambda$ και $(BN) = \mu$.

Έχουμε

$$\vec{BD} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \vec{BA} + \frac{2}{1+\lambda} \vec{BM} \quad (1)$$

και $\vec{BD} = \frac{1}{1+\mu} \vec{BR} + \frac{\mu}{1+\mu} \vec{BN} \quad (2)$

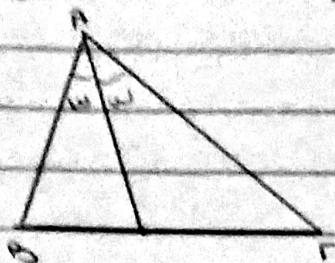
Ομως $\vec{BA} = 2\vec{BN}$ και $\vec{BR} = 2\vec{BM}$

Έτσι από (1) & (2) $= \frac{2}{1+\lambda} \vec{BN} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \vec{BN} = \frac{2}{1+\mu} \vec{BN} + \frac{\mu}{1+\mu} \vec{BN}$

Επειδή $\vec{BN}, \vec{BM}$ ε.α. $\Rightarrow$

$$\frac{2}{1+\lambda} = \frac{\mu}{1+\mu}, \quad \frac{\lambda}{1+\lambda} = \frac{2}{1+\mu} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

(ερώτη) Άσκηση: Έστω AD είναι εσωτερικός διχοτόμος των τοξώνων ABC . Ν.Σ.Ο $\hat{AD} = \frac{1}{b+c} (bAB + cAC)$



Επιφάνειες - Υποχώρες

Γενικό πρόβλημα: Δίνεται μια πραγματική ~~λίνα~~
 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τρεις μεταβλητές. Ένα σημείο $P(x, y, z)$
 του $\mathbb{R}^3$ λέγεται λύση της εξίσωσης:
 $f(x, y, z) = 0$. αν $f(x, y, z) = 0$

Το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $f(x, y, z) = 0$
 είναι ένα σύνολο σημείων το οποίο λέμε επιφάνεια με
 στοιχειώδη έννοια.

Πρόβλημα 1) Δίνεται μια εξίσωση $f(x, y, z) = 0$
 να βρεθεί το σύνολο Σ των λύσεων της και να αναγνωριστεί
 το γεωμ. σχήμα του Σ .

Πρόβλημα 2) Δίνεται ένα γεωμετρικό αντικείμενο Σ , όπως
 σφαίρα, κύλινδρος, κτλ. να βρεθεί εξίσωση $f(x, y, z) = 0$
 το σύνολο λύσεων αυτής να είναι το Σ .

Παρατήρηση: Μια εξίσωση $f(x, y, z) = 0$ μπορεί να έχει ως
 λύση μόνο ένα σημείο ή σφαίρα και κυλινδρικό σημείο.
 Για παράδειγμα η $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 0$
 έχει ως λύση μόνο το $(0, 0, 0)$.

Η εξίσωση $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ δεν έχει λύση.

Μια καμπύλη γενικά είναι η τομή δυο επιφανειών Σ_1 και Σ_2

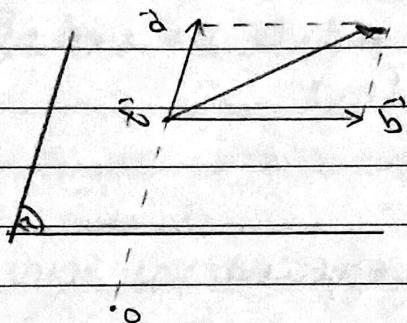
Επιπεδο: Ας θυμηθείτε τον ορισμό των επιπέδων χρησιμοποιώντας διανύσματα.

Ορισμός: Δίνονται ένα σημείο P_0 του $\mathbb{R}^3$ με διανυσμα θέσης ως προς αρχή O το $\vec{x}_0$ και διανύσματα:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

τα οποία είναι Γ.Α. Επινέδο (π) που διέσχεται από το σημείο P_0 και είναι εδαπτόμενο στα διάνττα $\vec{a}, \vec{b}$ ορίζεται το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}^3$ με διάνττα θέσης

$$(\pi) \quad \boxed{\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}} \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$



Η (π) λέγεται διανυσματική εξίσωση του επιπέδου

Παρατήρηση: Αν θέλουμε να βρούμε διατάρα σημείο του επιπέδου δίνουμε τιμές στα λ, μ .

Εάν $P(x,y,z)$ είναι τωκό σημείο του επιπέδου με διανυσμα θέσης $\vec{x}$, τότε από την εξίσωση (π) λαμβάνουμε $(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a_1, a_2, a_3) + \mu(b_1, b_2, b_3)$

ή ισοδύναμα,

$$(\pi_2) \quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases}$$

Οι εξισώσεις (π_2) λέγονται παραμετρικές εξισώσεις

Επειδή τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι, $\underline{\Gamma \cdot A} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} \neq 0$

όμως,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (\underbrace{a_2 b_3 - a_3 b_2}_A, \underbrace{a_3 b_1 - a_1 b_3}_B, \underbrace{a_1 b_2 - a_2 b_1}_\Gamma)$$

χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι
 $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$

Τότε λύνοντας το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων του (π₂) και αντικαθιστώντας στην τρίτη βεβαιούμε

$$Ax + By + \Gamma z + \underbrace{[-Ax_0 - By_0 - \Gamma z_0]}_{\Delta} = 0$$

Επομένως το επίπεδο περιγράφεται και από εξίσωση της μορφής $\boxed{Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0}$ (π₃)

όπου $(A, B, \Gamma) \neq (0, 0, 0)$

Η (π₃) λέγεται αναλυτική εξίσωση του επιπέδου

Πρόταση: Τα βέκτορες του χώρου $\mathbb{R}^3$ που πληρούν την εξίσωση

⊛ $\boxed{Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0}$ με $(A, B, \Gamma) \neq (0, 0, 0)$ ορίζουν επίπεδο.

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι $\underline{A \neq 0}$.

Θεωρούμε $y = \lambda$, $z = \mu$ και παρατηρούμε ότι η (*)

$$x = -\frac{\Delta}{A} + \left(-\frac{B}{A}\right)\lambda + \left(-\frac{\Gamma}{A}\right)\mu$$

$$\text{Αν } \vec{x} = (x, y, z) : \vec{x} = \underbrace{\left(-\frac{\Delta}{A}, 0, 0\right)}_{\vec{p}_0} + \lambda \underbrace{\left(-\frac{B}{A}, 1, 0\right)}_{\vec{a}} + \mu \underbrace{\left(-\frac{\Gamma}{A}, 0, 1\right)}_{\vec{b}}$$

που περιέχει επίπεδο

Παρατηρήσεις:

- ① Η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής:

Από την (π) παρατηρούμε ότι τα διάνττα $\vec{x}-\vec{x}_0$, $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Άρα $\langle \vec{x}-\vec{x}_0, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = 0$.

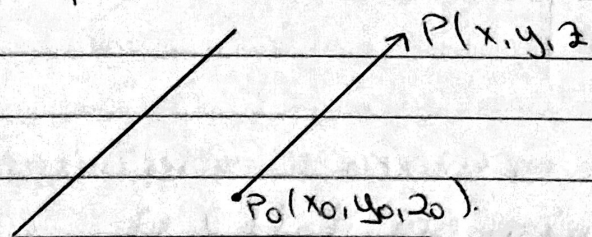
Ως εξίσωση λαμβάνουμε:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0.$$

- ② Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το επίπεδο με αναλυτική εξίσωση: $Ax + By + Cz + D = 0$ με $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$

Τότε το διάνττα $\vec{n} = (A, B, C)$ είναι κάθετο ως επίπεδο

Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι $P_0(x_0, y_0, z_0)$ είναι τυχαίο σημείο του π .



Τότε το τυχαίο σημείο $P(x, y, z)$ χαρακτηρίζουμε το διάνττα $\vec{P_0P} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

Από την εξίσωση βλέπουμε ότι:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \\ \langle \vec{n}, \vec{P_0P} \rangle = 0 \end{cases}$$

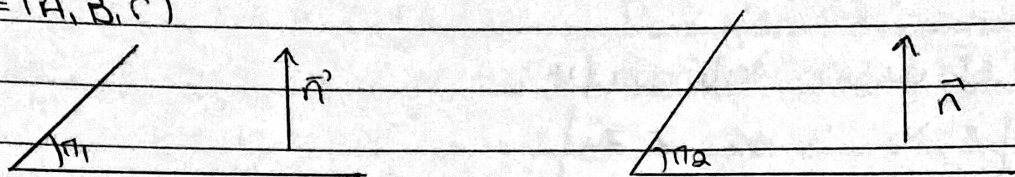
Για παράδειγμα το $(\pi): 5x + 3y - 7z = 0$ έχει ως κάθετο το $\vec{n} = (5, 3, -7)$

③ Τα επίπεδα $\pi_1: Ax+By+Cz+\Delta_1=0$

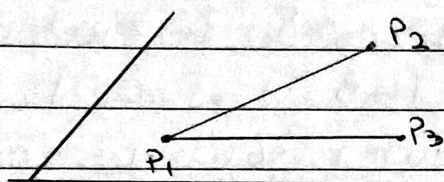
$$\pi_2: Ax+By+Cz+\Delta_2=0$$

με $\Delta_1 \neq \Delta_2$. Τι μπορούμε να πούμε για τα π_1, π_2 ?

Τα επίπεδα π_1, π_2 είναι παράλληλα διότι έχουν το ίδιο κάθετο
 $\vec{n} = (A, B, C)$



Παράδειγμα: 1) Δίνονται τα σημεία $P_1 = (1, 0, 1)$, $P_2 = (1, 1, 0)$
 $P_3 = (0, 1, 1)$. Να βρεθεί το επίπεδο που τα περιέχει.

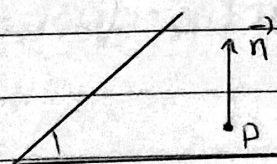


Τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{P_1P_2} = (0, 1, -1)$
 $\vec{b} = \vec{P_1P_3} = (-1, 1, 0)$ είναι εφαιρόμενα.

Άρα η αναλυτική εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Παράδειγμα: 2.) Να βρεθεί το επίπεδο το οποίο διέρχεται από
το $P(1, 1, 1)$ και είναι κάθετο στο $\vec{n} = (1, 2, 3)$



Αφού το $\vec{n}$ είναι κάθετο στο π , η αναλυτική εξίσωση θα είναι: $x+2y+3z+\Delta=0$

Αρκεί να βρούμε το Δ .

Αφού $P \in \pi$, θα επαληθεύει την εξίσωση.

$$\text{Άρα: } 1+2 \cdot 1+3 \cdot 1+\Delta=0 \Rightarrow \Delta=-6.$$

Συνεπώς η εξίσωση είναι $x+2y+3z-6=0$

15/03/2018

Παράδειγμα 3 | Δίνεται το επίπεδο : $3x + 4y + 7z - 4 = 0$.
Να βρεθούν 2 εφ'αντόμενα διάντ'α στο επίπεδο

Ας βρούμε 3 σημεία

Για $x=y=0 \Rightarrow z=4/7$ $P_1 = (0, 0, 4/7)$

Για $x=z=0 \Rightarrow y=1$ $P_2 = (0, 1, 0)$

Για $y=z=0 \Rightarrow x=4/3$ $P_3 = (4/3, 0, 0)$

Δύο εφ'αντόμενα διάντ'α είναι τα $\vec{a} = \vec{P_1P_2}$
 $\vec{b} = \vec{P_1P_3}$

Παράδειγμα: Οι εξισώσεις περιγράφουν επίπεδα,
(π_1): $z=0$, (π_2): $y=0$, (π_3): $x=y$.

